INSA DE TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ÈRE ANNEE

CONTROLE CONTINU ELECTROSTATIQUE. Durée 1 heure

Exercice 1 (Symétries / Anti-Symétries) 4 points

8 charges électriques ponctuelles sont réparties aux sommets d'un cube de centre O et de côté a. Les différentes faces du cube sont perpendiculaires aux axes $(Ox), (Oy)$ et (Oz). Les quatre charges situées dans le plan $z = +a/2$ sont identiques et négatives (valeur : -*q*). Les quatre charges situées dans le plan $z = -a/2$ sont identiques et opposées aux précédentes (valeur : +*q*).

1°) Faire un schéma complet de ce système de charges (*conseil : représenter le cube en premier*). **1 point**

2°) En coordonnées cartésiennes, quelle est l'orientation du champ électrique produit par ces 8 charges en un point P (*x,y,z*) de l'espace :

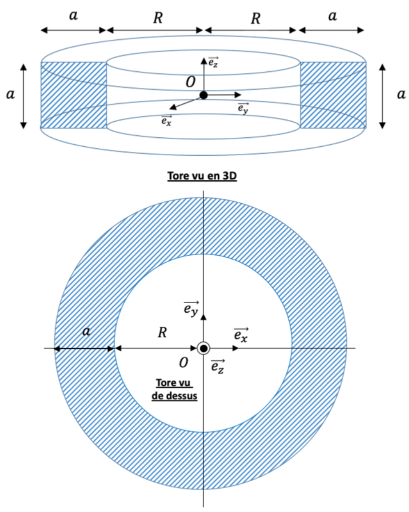
a) Lorsque P est un point quelconque du plan (xOz), différent de O. On précisera quelle ou quelles composantes du champ sont nulle(s) et on explicitera de quelle(s) variable(s) dépendent les composantes du champ non nulle(s). **1 point**

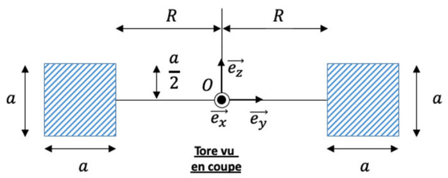
b) Lorsque P est un point quelconque du plan (xOy), différent de O. On précisera quelle ou quelles composantes du champ sont nulle(s) et on explicitera de quelle(s) variable(s) dépendent les composantes du champ non nulle(s). **1 point**

c) Que peut-on dire du champ électrique au point O ? **1 point**

Exercice 2 (Invariances / Symétries / Coordonnées) 8 points

Un tore est un solide qui représente un tube courbé et refermé sur lui-même. La section d'un tore peut être circulaire, rectangulaire, carrée… Un tore de section circulaire est un « donut ». Dans cet exercice, on considère un tore de section carrée. Ce type de tore « s'obtient » en faisant faire un tour complet autour de l'axe (Oz) à un carré de côté a.
On considère un tore de révolution d'axe (Oz), de rayon interne R dont la section carrée présente une surface a^2 (voir schémas ci-dessous). Ce tore est chargé avec une densité volumique de charges uniforme ρ_0.





1°) Quelles sont les invariances de ce système physique ? Quel est le système de coordonnées le plus adapté ? **1 point**

2°) A partir de l'analyse des plans de symétrie, prévoir la direction du vecteur champ électrique $\vec{E}$ en un point M de l'espace lorsque :

a) Le point M est un point quelconque **1 point**
b) Le point M est situé dans le plan (xOz) **1 point**
c) Le point M est situé sur l'axe (Oz) **1 point**
d) Le point M est confondu avec le point O **1 point**

On précisera à chaque fois quelle ou quelles composantes du champ sont nulle(s) et on explicitera de quelle(s) variable(s) dépendent les composantes du champ non nulle(s).

3°) On souhaite réaliser le calcul du volume de ce tore de section carrée en fonction de R et de a.

a) Préciser quel élément de volume vous allez utiliser **1 point**
b) Ecrire le volume du tore sous la forme d'une intégrale triple dont on précisera bien les bornes d'intégration **1 point**
c) Exprimer le volume de ce tore en fonction de R et de a. **1 point**

Exercice 3 (Coordonnées, Circulation, Opérateurs) 8 points

Dans le système cartésien, on considère le champ de vecteurs suivant :

$$\vec{V} = \frac{-Ky}{x^2+y^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{Kx}{x^2+y^2}\overrightarrow{e_y}$$

1°) En coordonnées cartésiennes, exprimer $\operatorname{div}\vec{V}$. **2 points**

2°) Exprimer le champ de vecteur en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire sous la forme :

$$\vec{V} = V_r(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_r} + V_\theta(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_\theta} + V_z(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

2 points

3°) En coordonnées cylindriques exprimer la circulation C_1 du champ de vecteurs $\vec{V} = \frac{K}{r}\overrightarrow{e_\theta}$ le long d'un demi-cercle de centre O situé dans le plan (xOy) et de rayon R, en tournant depuis le point A $(R,0,0)$ jusqu'au point B $(R,\pi,0)$. **2 points**

4°) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ en coordonnées cylindriques. **1 point**

5°) Le champ de vecteurs $\vec{V}$ est il à circulation conservative, à flux conservatif ou à circulation et flux conservatifs ? Justifier la réponse. **1 point**.

Donnée : en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$